



Problema 1. Sean $a_1, a_2, \dots, a_k$ enteros positivos. Determine todos los enteros positivos n tales que

$$\int_{n-1}^n \left\{ \frac{x}{a_1} \right\} \left\{ \frac{x}{a_2} \right\} \dots \left\{ \frac{x}{a_k} \right\} dx$$

tome el máximo valor posible.

Nota: $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de x .

Solución. Sea $n-1 = a_i q_i + r_i$ con $q_i \geq 0$ y $0 \leq r_i \leq a_i - 1$. Si $n-1 \leq x < n$, entonces $q_i \leq \frac{n-1}{a_i} \leq \frac{x}{a_i} < \frac{n}{a_i} \leq q_i + 1$. Esto implica que $\lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor = q_i$ y así

$$\left\{ \frac{x}{a_i} \right\} = \frac{x}{a_i} - q_i = \frac{x - (n-1 - r_i)}{a_i} \leq \frac{x - n + a_i}{a_i} = 1 - \frac{n-x}{a_i}.$$

Notamos que la igualdad se da si y solo si $r_i = a_i - 1$, es decir, si y solo si a_i divide a n . Luego

$$\prod_{i=1}^k \left\{ \frac{x}{a_i} \right\} \leq \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{n-x}{a_i} \right).$$

Consecuentemente, tenemos que

$$\int_{n-1}^n \left\{ \frac{x}{a_1} \right\} \left\{ \frac{x}{a_2} \right\} \dots \left\{ \frac{x}{a_k} \right\} dx \leq \int_{n-1}^n \left(1 - \frac{n-x}{a_1} \right) \left(1 - \frac{n-x}{a_2} \right) \dots \left(1 - \frac{n-x}{a_k} \right) dx.$$

Aplicando el cambio de variable $y = n - x$ en la integral derecha obtenemos que

$$\int_{n-1}^n \left\{ \frac{x}{a_1} \right\} \left\{ \frac{x}{a_2} \right\} \dots \left\{ \frac{x}{a_k} \right\} dx \leq \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{a_1} \right) \left(1 - \frac{y}{a_2} \right) \dots \left(1 - \frac{y}{a_k} \right) dy.$$

El lado derecho no depende de n y con esto concluimos que este es el mayor valor posible que toma la integral. La igualdad se da cuando a_i divide a n para todo $1 \leq i \leq k$, es decir, cuando n es un múltiplo común de $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Problema 2. En $\mathbb{R}^N$, considere k vectores $a_1, \dots, a_k$ y defina la sucesión $v_0, v_1, v_2, \dots$ con $v_0 = 0$, mediante la relación $v_n = v_{n-1} + na_n$ para $n \geq 1$ (los índices para a_n se consideran módulo k). Demuestre que si el conjunto $\{v_n/n\}_{n \geq 1}$ es acotado, entonces el conjunto de límites de subsucesiones de la sucesión $\{v_n/n\}_{n \geq 1}$ es finito.

Nota: Se dice que un conjunto en $\mathbb{R}^N$ es *acotado* si el conjunto de sus magnitudes es acotado.

Solución. Empezamos calculando explícitamente la subsucesión $v_k, v_{2k}, v_{3k}, \dots$:

$$v_{km} = \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=1}^k (kq+r)a_{kq+r} = \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{r=1}^k (kq+r)a_r = \sum_{r=1}^k \sum_{q=0}^{m-1} (kq+r)a_r = \sum_{r=1}^k \left(\frac{km(m-1)}{2} + mr \right) a_r.$$

Con lo anterior deducimos que

$$\frac{v_{km}}{km} = \frac{m-1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + \frac{1}{k}(a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k).$$

Si $S = a_1 + \dots + a_k \neq 0$, entonces por la desigualdad triangular tenemos que

$$\left\| \frac{v_{km}}{km} \right\| \geq \frac{m-1}{2} \|S\| - \frac{1}{k} \|a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k\|,$$

lo cual implicaría que la sucesión no es acotada al tomar m grande. Por lo tanto, debemos tener que $S = 0$ y así $v_{km} = m(a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k)$. Ahora, si $1 \leq s \leq k$, entonces

$$v_{km+s} = m(a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k) + (km+1)a_1 + \dots + (km+s)a_s,$$

con lo cual obtenemos que

$$\frac{v_{km+s}}{km+s} = \frac{m}{km+s}(a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k) + \frac{(km+1)}{km+s}a_1 + \dots + \frac{km+s}{km+s}a_s.$$

lo que nos permite deducir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{v_{km+s}}{km+s} = \frac{1}{k}(a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k) + a_1 + \dots + a_s.$$

Es decir, para todo $1 \leq s \leq k$, la sucesión $v_s, v_{k+s}, v_{2k+s}, \dots$ tiene un límite. Con esto concluimos que el conjunto de puntos límite tiene a lo sumo k elementos.

Problema 3. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $n = 2, 3, 4$ se define $A_n = A_n(a, b, c)$ como el área (positiva) del triángulo con vértices $(a, a^n), (b, b^n), (c, c^n)$. Determine el menor valor de la constante C de manera que se cumpla la desigualdad $CA_2A_4 \geq A_3^2$ para cualesquiera números reales a, b, c .

Solución. Sea $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - Px^2 + Qx - R$ y sea

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} a & a^n & 1 \\ b & b^n & 1 \\ c & c^n & 1 \end{pmatrix},$$

de manera que $A_n = |\Delta_n|$. Dado que a, b, c satisfacen la ecuación $x^{n+3} = Px^{n+2} - Qx^{n+1} + Rx^n$, deducimos que

$$\Delta_{n+3} = \det \begin{pmatrix} a & Pa^{n+2} - Qa^{n+1} + Ra^n & 1 \\ b & Pa^{n+2} - Qa^{n+1} + Ra^n & 1 \\ c & Pa^{n+2} - Qa^{n+1} + Ra^n & 1 \end{pmatrix} = P\Delta_{n+2} - Q\Delta_{n+1} + R\Delta_n.$$

Vamos a usar esta relación para calcular Δ_3 y Δ_4 . Notando que $\Delta_0 = \Delta_1 = 0$, obtenemos que

$$\Delta_3 = P\Delta_2, \quad \Delta_4 = P\Delta_3 - Q\Delta_2 = (P^2 - Q)\Delta_2.$$

Es conocido (o fácil verificar) que $\Delta_2 = (b-a)(c-a)(c-b)$, lo cual implica que $\Delta_2 \neq 0$ si a, b, c son distintos. Por lo tanto, la desigualdad $CA_2A_4 \geq A_3^2$ es equivalente a

$$C|P^2 - Q| \geq P^2,$$

para a, b, c distintos. Como $P = a+b+c$ y $Q = ab+ac+bc$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$C|a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc| \geq (a+b+c)^2.$$

Tomando $(a, b, c) = (1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$, con $\varepsilon \neq 0$, y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos que $C \geq \frac{3}{2}$. Vamos a demostrar que este valor en efecto cumple la desigualdad. Después de unas manipulaciones algebraicas podemos reescribir la expresión como

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc) \geq (a+b+c)^2 &\iff a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \\ &\iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

y así concluye la prueba.

Problema 4. Sea n un entero positivo y sean $x_1 < \dots < x_n$ números reales distintos. Demuestre que para todo $1 \leq k < n$ y todo $x \in [x_k, x_{k+1}]$ se cumple que

$$\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} + \prod_{j \neq k+1} \frac{x - x_j}{x_{k+1} - x_j} \geq 1.$$

Solución 1. Sea $p(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} + \prod_{j \neq k+1} \frac{x - x_j}{x_{k+1} - x_j}$. Observamos que $p(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo $n-1$ tal que $p(x_j) = 0$ para $j \notin \{k, k+1\}$ y $p(x_j) = 1$ para $j \in \{k, k+1\}$.

Suponemos primero que $1 < k < n-1$. Sea $I = [x_k, x_{k+1}]$ y $J = [x_{k-1}, x_{k+2}]$ (de forma que $I \subseteq J$). Por el teorema de Rolle y las igualdades anteriores sabemos que p' tiene al menos una raíz en cada uno de los intervalos (x_j, x_{j+1}) excepto posiblemente para $j \in \{k-1, k+1\}$. Esto da $n-4$ raíces de p' fuera del intervalo J (y al menos una en el interior de I).

Sea $x^* \in I$ el punto en que p alcanza su mínimo en I y supongamos que $p(x^*) < 1$; de esta forma $x^* \notin \{x_k, x_{k+1}\}$ y así deducimos que $p'(x^*) = 0$. Sean $y^* \in [x_{k-1}, x^*]$ y $z^* \in [x^*, x_{k+2}]$ los puntos en que p alcanza su máximo en los respectivos intervalos. Como $p(y^*) \geq p(x_k) = 1$ y $p(z^*) \geq p(x_{k+1}) = 1$, entonces los máximos no se alcanzan en los extremos de los intervalos y por

lo tanto se debe cumplir que $p'(y^*) = p'(z^*) = 0$. De esta forma p' tiene $n - 4$ raíces fuera de J y tres raíces (x^*, y^*, z^*) en su interior, lo cual es una contradicción ya que p' tiene grado a lo sumo $n - 2$. Con esto concluimos que $p(x) \geq 1$ en I , como queríamos probar.

Finalmente, el razonamiento es análogo para los casos $k \in \{1, n - 1\}$. Por ejemplo, en el caso $k = 1$ consideramos los intervalos $I = [x_1, x_2]$ y $J = [x_1, x_3]$. Si $x^* \in I$ es como antes y $p(x^*) < 1$, entonces al considerar el máximo de p en $[x^*, x_3]$ deducimos que existe $z^* \in [x^*, x_3]$ tal que $p'(z^*) = 0$. Esto implica que p' tiene dos raíces en J y $n - 3$ raíces en el exterior de J (por cada uno de los intervalos (x_j, x_{j+1}) para $3 \leq j \leq n - 1$), con lo cual deducimos la misma contradicción que en el caso anterior.

Solución 2. Damos una demostración alternativa para el caso $1 < k < n - 1$. Recordemos que, por el teorema de Rolle, $p'(x)$ tiene al menos $n - 4$ raíces fuera de J y al menos una raíz x^* en el interior de I (no es necesario que x^* sea el mínimo como en la solución anterior). Vamos a demostrar el siguiente resultado.

Lema. Se cumple que $p'(x_k) \geq 0$ y que $p'(x_{k+1}) \leq 0$.

Prueba. Por el teorema del valor medio existen puntos $y \in (x_{k-1}, x_k)$ y $z \in (x_{k+1}, x_{k+2})$ tales que

$$p'(y) = \frac{p(x_k) - p(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} > 0 \quad \text{y} \quad p'(z) = \frac{p(x_{k+2}) - p(x_{k+1})}{x_{k+2} - x_{k+1}} = \frac{-1}{x_{k+2} - x_{k+1}} < 0.$$

Supongamos que $p'(x_k) < 0$. Dado que $p'(x_k) < 0 < p'(y)$, por el teorema del valor intermedio existe $y^* \in (y, x_k)$ tal que $p'(y^*) = 0$. Esto da que las $n - 2$ raíces de p' corresponden a las $n - 4$ raíces fuera de J , $x^* \in I$ y $y^* \in J \setminus I$; en particular, todas las raíces de p' son simples y $p'(x)$ cambia de signo al pasar por ellas. Vemos que p' tiene únicamente dos raíces ($y^* < x^*$) en J , las cuales dividen al intervalo J en los subintervalos $J_1 = (x_{k-1}, y^*)$, $J_2 = (y^*, x^*)$, $J_3 = (x^*, x_{k+2})$, y p' tiene signo constante en cada uno de ellos. Como p' es negativo en J_2 (pues $x_k \in J_2$), entonces debe ser positivo en J_3 , lo cual es una contradicción porque $z \in (x_{k+1}, x_{k+2}) \subseteq J_3$. Esto demuestra que $p'(x_k) \geq 0$; la prueba de $p'(x_{k+1}) \leq 0$ es análoga. $\square$

Para concluir, observamos que el punto crítico x^* divide a I en dos subintervalos $I_1 = (x_k, x^*)$, $I_2 = (x^*, x_{k+1})$. Con base en el lema, tenemos dos casos por considerar: $p'(x_k) > 0 > p'(x_{k+1})$ o $p'(x_k) = 0$ (el caso $p'(x_{k+1}) = 0$ es análogo). En el primer caso, deducimos que p' debe tener una cantidad impar de raíces (contadas con multiplicidad) en I . Sin embargo, como hay $n - 4$ raíces fuera de J y p' es de grado a lo sumo $n - 2$, entonces p' solo puede tener una raíz en I (la cual es x^*). Con esto obtenemos que $p'(x) \geq 0$ en I_1 y $p'(x) \leq 0$ en I_2 . Esto implica que p es creciente en I_1 y decreciente en I_2 , lo que demuestra que $p(x) \geq 1$ en I .

En el segundo caso, tenemos que las $n - 2$ raíces de p' corresponden a las $n - 4$ raíces fuera de J y a $x_k, x^* \in I$; en particular, todas las raíces de p' son simples y $p'(x)$ cambia de signo al pasar por ellas. Como $p(x_{k+1}) \neq 0$ (pues p' no tiene más raíces), entonces $p'(x_{k+1}) < 0$, lo cual implica que $p'(x) \leq 0$ en I_2 . Como p' cambia de signo al pasar por sus raíces, deducimos que $p'(x) \geq 0$ en I_1 , y así podemos concluir como en el caso anterior.

Problema 5. Dado un entero positivo n , sea L_n la suma de las longitudes de los intervalos solución de la ecuación $\lfloor x^2 \rfloor + n^2 = 2\lfloor nx \rfloor$. Demuestre que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ existe y determine su valor.

Solución. En primer lugar, observamos que cualquier solución de la ecuación cumple $\lfloor nx \rfloor > 0$ y $x > 0$. Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación consiste en la unión, sobre los enteros positivos k , de las soluciones del sistema de ecuaciones $\lfloor nx \rfloor = k$ y $\lfloor x^2 \rfloor = 2k - n^2$, o equivalentemente de las desigualdades

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \quad \text{y} \quad 2k - n^2 \leq x^2 < 2k - n^2 + 1.$$

Empezamos notando que las desigualdades anteriores implican que

$$\frac{k^2}{n^2} \leq x^2 < 2k - n^2 + 1 \implies k^2 - 2kn^2 + n^4 < n^2 \implies (k - n^2)^2 < n^2 \implies |k - n^2| < n,$$

es decir, el rango de posibles valores es $n^2 - n < k < n^2 + n$. Conversamente, es sencillo comprobar que si k pertenece a este rango, entonces $\frac{k}{n} < \sqrt{2k - n^2 + 1}$ (la igualdad se da si $k = n^2 \pm n$).

En relación con los límites inferiores de las desigualdades podemos observar que $2k - n^2 \leq \frac{k^2}{n^2}$ por la desigualdad MA-MG. Asimismo, con los límites superiores notamos que

$$2k - n^2 + 1 < \frac{(k+1)^2}{n^2} \iff n^2 < n^4 - 2kn^2 + k^2 + 2k + 1 \iff n^2 - k < (n^2 - k)^2 + k + 1.$$

Esta última desigualdad es válida en vista que $k > 0$ y de la desigualdad $m \leq m^2$ para todo entero m (tomando $m = n^2 - k$). Con esto hemos deducido que las ecuaciones $\lfloor nx \rfloor = k$ y $\lfloor x^2 \rfloor = 2k - n^2$ tienen solución si y solo si $n^2 - n < k < n^2 + n$, en cuyo caso el conjunto solución es el intervalo $\left[\frac{k}{n}, \sqrt{2k - n^2 + 1}\right)$. Por lo tanto,

$$L_n = \sum_{k=n^2-n+1}^{n^2+n-1} \sqrt{2k - n^2 + 1} - \frac{k}{n}.$$

Tomando $k = n^2 + m$, podemos reescribir lo anterior como

$$L_n = \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \sqrt{n^2 + 2m + 1} - \left(n + \frac{m}{n}\right) = \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \frac{1 - m^2/n^2}{\sqrt{n^2 + 2m + 1} + n + m/n}.$$

Observamos que $n - 1 < \sqrt{n^2 + 2m + 1} < n + 1$, con lo cual los denominadores satisfacen la aproximación

$$\sqrt{n^2 + 2m + 1} + n + \frac{m}{n} = 2n + O(1).$$

Además, los numeradores son positivos y la suma de ellos satisface la aproximación

$$\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} 1 - \frac{m^2}{n^2} = 2n - \frac{2n}{3} + O(1) = \frac{4n}{3} + O(1),$$

con lo cual concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{2}{3}$.

Problema 6. Considere una sucesión de enteros positivos $a_1 < a_2 < \dots$ que satisface que para todo primo p existe N tal que p divide a a_n para todo $n \geq N$. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y de grado al menos 2. Dado un entero n , sea $C(n)$ la cantidad de enteros $m \in [1, n]$ tales que no existen enteros positivos j, k que cumplan la ecuación $m = P(j) - a_k$. Demuestre que existen $M > 0$ y $c > 0$, tales que $C(n) \geq cn$ para todo $n \geq M$.

Solución. Empezamos demostrando el siguiente resultado.

Lema. Existe un primo p y un entero a tal que la ecuación $P(x) \equiv a \pmod{p}$ no tiene soluciones.

Prueba. Como $P(x)$ tiene coeficientes enteros, entonces $P(x + pk) \equiv P(x) \pmod{p}$ para todo entero x . Por lo tanto, para demostrar el lema es suficiente encontrar un primo p tal que dos elementos de $S(p) = \{P(0), P(1), \dots, P(p-1)\}$ sean congruentes (módulo p), resultando así en que el conjunto $S(p)$ no es un sistema completo de residuos. Sea $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Como P tiene grado al menos 2, entonces Q es un polinomio de grado al menos 1, y por lo tanto no es un polinomio constante. Esto implica que existe algún primo p tal que la ecuación $Q(x) \equiv 0 \pmod{p}$ tiene solución, y por lo tanto la ecuación $P(x+1) \equiv P(x) \pmod{p}$ tiene solución. Con esto concluimos que $S(p)$ tiene al menos dos elementos congruentes, como queríamos probar. $\square$

Sean p y a como en el lema, con $1 \leq a \leq p$; en adelante todas las congruencias serán tomadas módulo p . Decimos que un entero positivo m es representable si existen enteros positivos j, k que cumplan la ecuación $m = P(j) - a_k$. Vamos a demostrar que si n es grande y $\tilde{C}(n)$ es la cantidad de enteros congruentes a a en $[1, n]$ que no son representables, entonces $\tilde{C}(n) \geq cn$; claramente esto implica el resultado, pues $C(n) \geq \tilde{C}(n)$. Para hacer esto, estimaremos la cantidad de posibles pares (j, k) que pueden resolver la ecuación $m = P(j) - a_k$ cuando $m \equiv a$ y $m \in [1, n]$.

Sea $P(x) = c_d x^d + \dots + c_1 x + c_0$. Si $c_d < 0$ el resultado es claro, por lo que en adelante suponemos que $c_d > 0$. En vista de que existe $K = K(p)$ tal que $a_n \equiv 0$ si $n > K$ y que $P(x) \not\equiv a$, la existencia de solución para la ecuación $m = P(j) - a_k$ y la congruencia $m \equiv a$ implican que $k \leq K$. Ahora estimaremos la cantidad de posibles valores de j . Como $c_d > 0$, se cumple que existe J tal que si $j > J$, entonces $P(j) \geq \frac{1}{2} c_d j^d$. Por lo tanto,

$$j^d \leq c_d j^d \leq 2P(j) = 2(m + a_k) \leq 2(n + a_K),$$

donde usamos que $m \in [1, n]$ y $a_k \leq a_K$ para la última desigualdad. Si tomamos n tal que $n \geq 2a_K$, entonces podemos estimar $2(n + a_K) \leq 3n$. Esto implica que $j \leq \max\{J, \sqrt[d]{3n}\}$, con lo cual concluimos que la cantidad de posibles pares (j, k) es a lo sumo $K \cdot \max\{J, \sqrt[d]{3n}\}$. Es decir, si $n \geq \max\{2a_K, J^d/3\}$, entonces la cantidad de enteros congruentes a a en $[1, n]$ que son representables es a lo sumo $K \sqrt[d]{3n}$.

Recordemos que denotamos por $\tilde{C}(n)$ a la cantidad de enteros congruentes a a en $[1, n]$ que no son representables. Con base en lo anterior, si $n \geq \max\{2a_K, J^d/3\}$, entonces obtenemos

$$\tilde{C}(n) \geq \left\lfloor \frac{n-a}{p} \right\rfloor - K \sqrt[d]{3n} \geq \frac{n}{p} - 1 - K \sqrt[d]{3n}.$$

Esta última expresión se puede acotar por $\frac{n}{2p}$ para n grande, y así concluye la prueba.

Problema 7. Sea $\mathbb{Z}_2$ el cuerpo de dos elementos y sea B una base del espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^n$, con B disjunta de la base canónica. Demuestre que existe un subconjunto $B' \subseteq B$, con al menos $n/3$ elementos, tal que ninguno de los vectores de la base canónica se puede expresar como suma de algunos elementos de B' .

Solución. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Escribimos cada vector de la base canónica con respecto a la base B como $e_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} v_j$. Consideramos el conjunto $C(i) = \{v_j \in B : c_{i,j} \neq 0\}$, es decir, $C(i)$ es el conjunto de los vectores de la base B que aparecen al representar e_i con respecto a la base B . Observamos que como B es disjunta de la base canónica, entonces se cumple que $|C(i)| \geq 2$.

Sea $E = \{C(1), C(2), \dots, C(n)\}$ y considere el hipergrafo $H = (B, E)$ (no necesariamente uniforme), cuyos vértices son los elementos de B y sus aristas son los conjuntos $C(i)$. De esta manera, el problema es equivalente a encontrar un subconjunto independiente en H , es decir, un subconjunto de H que no contenga aristas.

A continuación mostramos cómo transformar H en un grafo G . Para cada $C(i)$ con más de dos elementos, reemplazamos $C(i)$ por un subconjunto (arbitrario) $D(i)$ con exactamente dos elementos. Si $F = \{D(1), D(2), \dots, D(n)\}$, entonces el conjunto $G = (B, F)$, cuyos vértices son los elementos de B y cuyas aristas son los conjuntos $D(i)$, es un grafo. Notamos que un conjunto independiente en G es también un conjunto independiente en H .

Recordamos que la desigualdad de Caro-Wei establece que si $\alpha(G)$ es el tamaño del mayor conjunto independiente de G , entonces se cumple que $\alpha(G) \geq \sum_{v \in B} \frac{1}{d(v) + 1}$, donde $d(v)$ es el grado de v en G . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y observando que G tiene n vértices y a lo sumo n aristas, podemos concluir que

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in B} \frac{1}{d(v) + 1} \geq \frac{n^2}{\sum_{v \in B} d(v) + n} = \frac{n^2}{2|F| + n} \geq \frac{n^2}{2n + n} = \frac{n}{3}.$$